

1 目的

RLC 回路の過渡現象を観察し、回路の動作を理解する。

2 理論

図 1: RLC 直列回路

図 1 に示す回路を考える。A の側に倒してあったスイッチ S を時刻 $t = 0$ で B の側へ切り替えて直流電圧 V を印加した時の過渡現象を考える。

この場合の回路方程式は、回路に流れる電流を $i(t)$ として、 $t > 0$ で

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V \quad (1)$$

となり、両辺を微分すると、次の微分方程式

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0 \quad (2)$$

が得られる。

(2) 式の 2 階線形同次微分方程式は、特性方程式 $Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0$ の解の判別条件に応じて次の解を持つ。ただし、 C_1 、 C_2 は初期条件で決まる定数である。

1. $R^2 > 4L/C$ のとき

$$i(t) = C_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha-\beta)t} \quad (3)$$

$$\text{ただし、} \alpha = \frac{R}{2L}, \beta = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

2. $R^2 = 4L/C$ のとき

$$i(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\alpha t} \quad (4)$$

3. $R^2 < 4L/C$ のとき

$$i(t) = C_1 e^{-\alpha t} \sin(\beta t + C_2) \text{(減衰振動解)} \quad (5)$$

$$\text{ただし、} \alpha = \frac{R}{2L}, \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

(3) 式は $i(t) = C'_1 e^{(\alpha t)} \sin \beta t + C'_2 e^{(-\alpha t)} \cos \beta t$ と表すこともできる。

3 実験方法

3.1 概要

図 2: 階段 (ステップ) 関数

本実験では図 2 の代わりに、図 3 の回路を用いて、図 4 に示すような矩形波 (2[V peak-to-peak], オフセット 1[V], duty 比 1:1) を入力するものとする。時刻 $t = 0$ で図 2 に示す $0 \rightarrow +V$ の (昇り) 階段関数を回路に印加し、次に、十分長い時間がたったあとの時刻 $t = t_0$ で、図 2 と逆の $+V \rightarrow 0$ の (下り) 階段関数を印加する。このあと更に、時刻 $t = 2t_0$ で再び $0 \rightarrow +V$ の (昇り) 階段関数を回路に印加する。つまり、周期的な過渡現象を起こさせるわけである。ただし、(3)~(5) 式の定数 α が適当に大きいこと、いいかえれば減衰に要する時間の目安である $1/\alpha$ が矩形波の半周期 t_0 より十分小さいことが必要である。

図 3: 測定回路

なお、電流の時間変化を観測するには、抵抗 R の両端の電圧変化を見ればよい。また、電源の内部インピーダンスも考慮に入れて考察を行うこと。回路図では純抵抗と仮定し、 r_0 と表しており、実験に使用する発振器においては $r_0 = 600[\Omega]$ とする。

図 4: 矩形波

3.2 準備

実験に先立ってどのような過渡応答が期待されるか計算により予測する。

1. 与えられた L 、 C 、 R の組み合わせは、特性方程式のどの判別条件の場合か。
2. $1/\alpha$ を計算し (μs の単位で表す)、その 4~5 倍の時間を t_0 とする。ただし、 $2t_0$ の時間が $10[\mu s]$ 、 $20[\mu s]$ 、 $50[\mu s]$ のいずれかになるように決める。この $2t_0$ を測定で用いる矩形波 (図 4) の周期とする。
3. 各時刻に観測される過渡電流を計算し、次にこれを横 $10[cm]$ 、縦 $8[cm]$ のマスの中に、横軸に時間を、縦軸に出力電力 (抵抗の両端の電圧) をとって、矩形波の 1 周期 $2t_0$ についてできるだけ正確に描け。なお、縦軸の単位は適当でよいが、縦 $8[cm]$ に一杯に描くようにする。参考図を図 6 に示す。

図 5: 各時刻における図 1 の等価回路

図 6: 予測波形の例 (方眼紙、破線は印加電圧)

4. L の両端の電圧はどんな変化をするか、3. と同じ要領で予測波形を描け。縦軸の単位は 2. で描いたグラフに合わせること。
5. C の両端の電圧はどんな変化をするか、3. と同じ要領で予測波形を描け。

3.3 実験手順

1. 必要器具の点検後、ブレッドボード上の回路作成と機器の結線を行う。ブレッドボード内の線の接続、および機器のグラウンドレベルが正しく共通にとれていることを確認する (図 3)。また、オシロスコープの掃引トリガのタイミングとして、印加電圧の立ち上がりをとるようにオシロスコープを調整する (図 6 の破線で印加電圧を示す)。
2. 予測された過渡特性と比較するため、信号強度 (出力電圧) が 2[V]、オフセットが 1[V] になるように発振器のトリマ (微調整つまみ) および offset つまみを使って調整する。また、発振器の周波数を微調整し、TIME/DIV を横軸 10 目盛りでちょうど 1 周期が表示されるように調整する (図 6 参照)。
3. 抵抗 R の両端の電圧が予測した過渡特性と一致することがオシロスコープの画面上で読めたら、指導教員または TA に確認してもらい、批評を受ける。もし、予測との間に顕著な差異が現れたら、その原因について考えること。
4. 教員または TA の確認が済んだら、波形をプリントアウトする。
5. L および C の両端電圧についてはどうか。測定波形と予測波形とを比較・確認した上で、プリントアウトする (計 2 枚)。

6. 4. および 5. の結果を指導教員に提示し、実験結果が妥当なものと判断されれば、実験を終了する。コイル等の部品やブレッドボードなどを元の場所に収め、実験機の上を元の状態に整頓する。

4 理論値の計算

内部抵抗 $r_0=600[\Omega]$ に注意する。

電圧は実験手順にあるように

$$V(t) = \begin{cases} 0[V] & (t < 0, t_0 < t < 2t_0, \dots) \\ 2[V] & (0 < t < t_0, 2t_0 < t < 3t_0, \dots) \end{cases}$$

である。

4.1 $L=1.5[\text{mH}], C=5600[\text{pF}], R=1.5[\text{k}\Omega]$ の場合

$L=1.5[\text{mH}], C=5600[\text{pF}], R=1.5[\text{k}\Omega]$ の場合、特性方程式

$$1.5 \times 10^{-3} p^2 + (1.5 \times 10^3 + 600)p + \frac{1}{5600 \times 10^{-12}} = 0$$

の判別式

$$(1.5 \times 10^3 + 600)^2 - 4 \frac{1.5 \times 10^{-3}}{5600 \times 10^{-12}} = 3.3 \times 10^6 > 0$$

から、解の形は

$$i(t) = C_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha-\beta)t}$$

ここで

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1.5 \times 10^3 + 600}{2 \cdot 1.5 \times 10^{-3}} = 7.0 \times 10^5 \\ \beta &= \sqrt{\left(\frac{1.5 \times 10^3 + 600}{2 \cdot 1.5 \times 10^{-3}}\right)^2 - \frac{1}{1.5 \times 10^{-3} \cdot 5600 \times 10^{-12}}} \\ &= 6.1 \times 10^5 \end{aligned}$$

だから

$$i(t) = C_1 e^{(-9.1 \times 10^4)t} + C_2 e^{(-1.3 \times 10^6)t} \quad (6)$$

4.1.1 $0 < t < t_0$ について

$0 < t < t_0$ の範囲について、 $t=0$ で $i(0)=0$ だから

$$C_1 + C_2 = 0 \quad (7)$$

また、 $t = 0$ で $V = 2$ 、 $\int i dt = 0$ だから (1) 式から

$$\frac{di(0)}{dt} = \frac{2}{L}$$

これを (6) 式に代入して

$$-9.1 \times 10^4 C_1 - 1.3 \times 10^6 C_2 = \frac{2}{1.5 \times 10^{-3}}$$

$$C_1 = 1.1 \times 10^{-3}$$

$$C_2 = -1.1 \times 10^{-3}$$

ゆえに

$$i(t) = 1.1 \times 10^{-3} e^{(-9.1 \times 10^4)t} - 1.1 \times 10^{-3} e^{(-1.3 \times 10^6)t} \quad (8)$$

4.1.2 $t_0 < t < 2t_0$ について

$T = t - t_0$ とすると、 $dT = dt$ だから、

$t_0 < t < 2t_0$ の範囲について、 $0 < T < t_0$ の範囲について考え、図 1 でスイッチ S を $T = 0$ で A 側に戻したと考えると

$$L \frac{di(T)}{dT} + Ri(T) + \frac{1}{C} \int i(T) dT = 0$$

同様に解いて

$$i(T) = C_1 e^{(-9.1 \times 10^4)T} + C_2 e^{(-1.3 \times 10^6)T}$$

$T = 0$ で定常状態であったと考えられるので、 $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$ であり、連続だから、 $i(T) = 0$ としてよいので

$$0 = C_1 + C_2$$

また、 $T = 0$ で定常状態であったから $\frac{1}{C} \int i dT = V = 2$ だから、

$$-9.1 \times 10^4 C_1 - 1.3 \times 10^6 C_2 = -\frac{2}{L}$$

$$+1.3 \times 10^6 C_2 = -\frac{2}{1.5 \times 10^{-3}}$$

$$C_1 = -1.1 \times 10^{-3}$$

$$C_2 = 1.1 \times 10^{-3}$$

ゆえ

$$\begin{aligned} i(t) &= -1.1 \times 10^{-3} e^{(-9.1 \times 10^4)T} + 1.1 \times 10^{-3} e^{(-1.3 \times 10^6)T} \\ &= -1.1 \times 10^{-3} e^{(-9.1 \times 10^4)(t-t_0)} + 1.1 \times 10^{-3} e^{(-1.3 \times 10^6)(t-t_0)} \quad (9) \end{aligned}$$

4.1.3 矩形波の周期

$\frac{1}{\alpha} = 1.4 \times 10^{-6}[\text{s}] = 1.4[\mu\text{s}]$ より、その 4~5 倍は $5.6 \sim 7.0[\mu\text{s}]$ であるが、
500/7 倍の $100[\mu\text{s}]$ を t_0 とし、周期 $2t_0$ は $2t_0 = 200[\mu\text{s}]$ とする。

4.1.4 電流値

電流は

$$i(t) = \begin{cases} 1.1 \times 10^{-3} e^{(-9.1 \times 10^4)t} - 1.1 \times 10^{-3} e^{(-1.3 \times 10^6)t} & (0 < t < t_0) \\ -1.1 \times 10^{-3} e^{(-9.1 \times 10^4)(t-t_0)} + 1.1 \times 10^{-3} e^{(-1.3 \times 10^6)(t-t_0)} & (t_0 < t < 2t_0) \end{cases}$$

である。これの $R(=2.1 \times 10^3)$ 倍である R の電圧曲線を図 7 に示す。

4.1.5 L の電圧値

L の電圧は

$$L \frac{di(t)}{dt} = \begin{cases} -0.15 \times 10^{-3} e^{(-9.1 \times 10^4)t} + 2.1 \times 10^{-3} e^{(-1.3 \times 10^6)t} & (0 < t < t_0) \\ 0.15 \times 10^{-3} e^{(-9.1 \times 10^4)(t-t_0)} - 2.1 \times 10^{-3} e^{(-1.3 \times 10^6)(t-t_0)} & (t_0 < t < 2t_0) \end{cases}$$

である。この L の電圧曲線を図 8 に示す。

4.1.6 C の電圧値

C の電圧は

$$C \int i(t) dt = \begin{cases} 2.2 \times 10^8 e^{(-9.1 \times 10^4)t} - 1.5 \times 10^9 e^{(-1.3 \times 10^6)t} & (0 < t < t_0) \\ -2.2 \times 10^8 e^{(-9.1 \times 10^4)(t-t_0)} + 1.5 \times 10^9 e^{(-1.3 \times 10^6)(t-t_0)} & (t_0 < t < 2t_0) \end{cases}$$

である。この C の電圧曲線を図 9 に示す。

4.2 $L=1.5[\text{mH}], C=200[\text{pF}], R=1.0[\text{k}\Omega]$ の場合

$L=1.5[\text{mH}], C=200[\text{pF}], R=1.0[\text{k}\Omega]$ の場合も同様にして、特性方程式の判別式は

$$(1 \times 10^3)^2 - 4 \frac{1.5 \times 10^{-3}}{200 \times 10^{-12}} = -2.7 < 0$$

から、解の形は

$$i(t) = C_1 e^{-5.2 \times 10^5 t} \sin(1.7 \times 10^6 t) + C_2 e^{-5.2 \times 10^5 t} \cos(1.7 \times 10^6 t)$$

4.2.1 $0 < t < t_0$ について

$0 < t < t_0$ の範囲について、 $t = 0$ で $i(0) = 0$ だから

$$C_2 = 0$$

また、 $t = 0$ で $V = 2$ 、 $\int i dt = 0$ だから

$$1.7 \times 10^6 C_1 = \frac{2}{1.5 \times 10^{-3}}$$

$$C_1 = 7.8 \times 10^{-4}$$

$$C_2 = 0$$

よって

$$i(t) = 7.6 \times 10^{-4} e^{-5.2 \times 10^5 t} \sin(1.7 \times 10^6 t)$$

4.2.2 $t_0 < t < 2t_0$ について

$T = t - t_0$ とすると、 $dT = dt$ だから、

$t_0 < t < 2t_0$ の範囲について、

同様に解いて

$$i(t) = -7.6 \times 10^{-4} e^{-5.2 \times 10^5 (t-t_0)} \sin(1.7 \times 10^6 (t-t_0))$$

4.2.3 矩形波の周期

$\frac{1}{\alpha} = 1.9 \times 10^{-6} [s] = 1.9 [\mu s]$ より、その 4~5 倍は $7.6 \sim 9.5 [\mu s]$ であるから、約 5.2 倍の $10 [\mu s]$ を t_0 とし、周期 $2t_0$ は $2t_0 = 20 [\mu s]$ とする。

4.2.4 電流値

電流は

$$i(t) = \begin{cases} 7.6 \times 10^{-4} e^{-5.2 \times 10^5 t} \sin(1.7 \times 10^6 t) & (0 < t < t_0) \\ 7.6 \times 10^{-4} e^{-5.2 \times 10^5 (t-t_0)} \sin(1.7 \times 10^6 (t-t_0)) & (t_0 < t < 2t_0) \end{cases}$$

である。これの R(=1600) 倍である R の電圧曲線を図 10 に示す。

4.2.5 L の電圧値

L の電圧は

$$\frac{di(t)}{dt} = \begin{cases} 1.9e^{-5.2 \times 10^5 t} \cos(1.7 \times 10^6 t) \\ -0.59e^{-5.2 \times 10^5 t} \sin(1.7 \times 10^6 t) & (0 < t < t_0) \\ -1.9e^{-5.2 \times 10^5 (t-t_0)} \cos(1.7 \times 10^6 (t-t_0)) \\ +0.59e^{-5.2 \times 10^5 (t-t_0)} \sin(1.7 \times 10^6 (t-t_0)) & (t_0 < t < 2t_0) \end{cases}$$

である。この電圧曲線を図 11 に示す。

4.2.6 C の電圧値

C の電圧は

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt = \begin{cases} -6.3 \times 10^{15} e^{-5.2 \times 10^5 t} \sin(1.7 \times 10^6 t) \\ -2.0 \times 10^{16} e^{-5.2 \times 10^5 t} \cos(1.7 \times 10^6 t) & (0 < t < t_0) \\ 6.3 \times 10^{15} e^{-5.2 \times 10^5 t} \sin(1.7 \times 10^6 t) \\ +2.0 \times 10^{16} e^{-5.2 \times 10^5 t} \cos(1.7 \times 10^6 t) & (t_0 < t < 2t_0) \end{cases}$$

である。この電圧曲線を図 12 に示す。

5 結果

L=1.5[mH]、C=5600[pF]、R=1.5[kΩ] の場合の測定結果を図 13 に、L=1.5[mH]、C=200[pF]、R=1.0[kΩ] の場合の測定結果を図 14 に示す。縦軸は電圧で、1 目盛りは 1[V] である。横軸は時間で、1 目盛りは、図 13 の R と C の結果のみ 20[μs]、他は全て 2[μs] である。

6 考察

6.1 L=1.5[mH],C=5600[pF],R=1.5[kΩ] の場合

R と C において、理論では 20[μs] が 1 周期であるが、測定では 200[μs] のようである。これは、R に比べて C が十分大きく、定常状態までの時間 (=R×C) が長いが見積もる α が C を考慮しないためであると考えられる。

R と L は電圧が理論値より小さい。また、C の電圧が 2[V] に近づくのが早い。これは、内部抵抗が理論値 600[Ω] より大きい、導線が抵抗の役割を果たした、などにより流れる電流が理論値より小さいためであると考えられる。

6.2 $L=1.5[\text{mH}], C=200[\text{pF}], R=1.0[\text{k}\Omega]$ の場合

R は計測時に調整を誤ったため波形が読み取りにくい、理論とあまり一致しないので、測定ミスの恐れがある。

C はトリガレベルを間違えたため、 $t_0 < t < 2t_0$ の範囲を取得してしまったが、L は、電圧が理論値より小さい。これも前述と同じく、導線が抵抗になったり、内部抵抗が理論値より高かったりしたために電流が小さくなったためであると思われる。