

図 1: 2 端子対回路

1 目的

2 端子対回路の入出力特性が F 行列により表現できることを理解する。2 端子対回路としては RC 回路をとりあげる。

2 理論

図 1 に示す 2 つの端子対からなる回路を考える。入力端子対 1、1' の電圧、電流 V_1 、 I_1 は、出力端子対 2、2' の電圧、電流 V_2 、 I_2 により

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

と表される。この式中の 2 行 2 列の行列

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

を F 行列 (fundamental matrix) とよび、この行列の各要素 A、B、C、D を 4 端子定数とよぶ。F 行列は K 行列とよばれることもある。なお、出力電流 I_2 の向きのとり方に注意すること。4 端子定数 A は出力端子 2、2' を開放したときの入力電圧 V_1 、 V_2 の比

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad (2)$$

と定義される。また、B は出力端子対 2、2' を短絡した時の入力電圧 V_1 と出力電流 I_2 の比

$$B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \quad (3)$$

であり、C は出力端子対 2、2' を開放したときの入力電流 I_1 と出力電圧 V_2 の比

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad (4)$$

図 2: 2 端子対回路の縦続接続

であり、D は出力端子対 2、2' を短絡したときの入力電流 I_1 と出力電流 I_2 の比

$$D = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} \quad (5)$$

である。

図 2 のように 2 端子対回路を縦続接続すると、全体の回路の F 行列は各々の回路の F 行列の積で表される。すなわち

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

とすると、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

より

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

と表される。

R、L、C、M、以外の素子を含まない回路 (これを自然回路とよぶ) では、F 行列の行列式 $AD-BC$ の値は 1 となる。また、入力端子と出力端子を入れ換えた回路の F 行列は、A と D を入れ換えたものとなる。

3 実験方法

3.1 F 行列の測定

3.1.1 4 端子定数 A、C の測定

図 3 のように回路の接続を行い、 V_1 の絶対値 $|V_1|$ 、 V_2 の絶対値 $|V_2|$ 、 V_{10} の絶対値 $|V_{10}|$ 、 V_1 と V_2 の位相差 θ_A 、 V_{10} と V_2 の位相差 θ_C をオシロスコー

図 3: 4 端子定数 A、C の測定

図 4: 4 端子対数 B、D の測定

プを用いて測定する。 R_{10} は電流を求めるための抵抗であり、十分小さい値であることが望ましい。この実験では $10[\Omega]$ 程度に設定する。これらの値より

$$|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} \quad (10)$$

$$\arg A = \theta_A \quad (11)$$

$$|C| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_2|}{R_{10}}} = \frac{|V_{10}|}{|V_2|} \quad (12)$$

$$\arg C = \theta_C \quad (13)$$

が求められる。

3.1.2 4 端子定数 B、D の測定

図 4 のように回路の接続を行い、 V_1 の絶対値 $|V_1|$ 、 V_{10} の絶対値 $|V_{10}|$ 、 V_{20} の絶対値 $|V_{20}|$ 、 V_{10} と V_{20} の位相差 θ_B 、 V_{10} と V_{20} の位相差 θ_D をオシロスコープを用いて測定する。 R_{10} 、 R_{20} は電流を求めるための抵抗であり、十分小さい値であることが望ましい。この実験では $10[\Omega]$ 程度に設定する。これらの値より

$$|B| = \frac{\frac{|V_1|}{R_{20}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1|}{|V_{20}|} \quad (14)$$

$$\arg B = \theta_B \quad (15)$$

図 5: 被測定回路 1

図 6: 被測定回路 2

$$|D| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}|R_{20}}{|V_{20}|R_{10}} \quad (16)$$

$$\arg D = \theta_D \quad (17)$$

が求められる。

3.2 被測定回路と測定手順

被測定回路を図 5、6、7 に示す。抵抗、コンデンサの値は $R=1.5[k\Omega]$ 、 $C=2.2[\mu F]$ とし、周波数 f は $f=1[kHz]$ とする。被測定回路 2 は被測定回路 1 の入力端子と出力端子を入れ替えたものである。また、 R_{10} 、 R_{20} はともに、 10Ω である。

以下の順に測定を行う。

1. 図 5 の被測定回路 1 について、4 端子定数 (A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1) を測定より求める。

図 7: 被測定回路 3

2. 図 6 の被測定回路 2 について、4 端子定数 (A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_2) を測定より求める。
3. 図 7 の被測定回路 3 について、4 端子定数 (A_3 、 B_3 、 C_3 、 D_3) を測定より求める。

4 理論値

コンデンサのリアクタンスを $X_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{T}{j2\pi C}$ とする。 R 、 R_{10} 、 R_{20} 、 C は実験方法に示した値である。

4.1 被測定回路 1

被測定回路 1 の理論値を以下に示す。

A、C の測定において、 $T = 107 \times 10^{-6}[s]$ である。

$$V_1 = RI_1 + X_C I_1$$

$$V_2 = X_C I_1$$

から

$$\begin{aligned} A = \frac{V_1}{V_2} &= \frac{R}{X_C} + 1 \\ &= \frac{1.5 \times 10^3 \cdot j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2.2 \times 10^{-6}}{107 \times 10^{-6}} + 1 \\ &= 1 + j193.7805 \\ C = \frac{I_1}{V_2} &= \frac{1}{X_C} \\ &= \frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2.2 \times 10^{-6}}{107 \times 10^{-6}} \\ &= j0.1292[S] \end{aligned}$$

B、D の測定において、 $T = 106 \times 10^{-6}[s]$ である。

$$V_1 = RI_1 + X_C(I_1 - I_2)$$

$$V_2 = X_C(I_1 - I_2) = R_{20}I_2$$

から

$$\begin{aligned} B = \frac{V_1}{I_2} &= R + R_{20} + \frac{RR_{20}}{X_C} \\ &= 1.5 \times 10^3 + 10 + \frac{10 \cdot 1.5 \times 10^3 \cdot j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2.2 \times 10^{-6}}{106 \times 10^{-6}} \\ &= 1510 + j1956.0860[\Omega] \\ D = \frac{I_1}{I_2} &= 1 + \frac{R_{20}}{X_C} \\ &= 1 + \frac{10 \cdot j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2.2 \times 10^{-6}}{106 \times 10^{-6}} \\ &= 1 + j1.3041 \end{aligned}$$

4.2 被測定回路 2

被測定回路 2 の理論値を以下に示す。

A、C の測定において、 $T = 107 \times 10^{-6}[s]$ である。

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 X_C \\ V_2 &= I_1 X_C \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} A = \frac{V_1}{V_2} &= 1 \\ C = \frac{I_1}{V_2} &= \frac{1}{X_C} \\ &= \frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2.2 \times 10^{-6}}{107 \times 10^{-6}} \\ &= j0.1292[S] \end{aligned}$$

B、D の測定において、 $T = 1 \times 10^{-3}[s]$ である。

$$\begin{aligned} V_1 &= X_C(I_1 - I_2) \\ V_2 &= R_{20}I_2 = X_C(I_1 - I_2) - RI_2 \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} B = \frac{V_1}{I_2} &= R + R_{20} \\ &= 1510[\Omega] \\ D = \frac{I_1}{I_2} &= 1 + \frac{R + R_{20}}{X_C} \\ &= 1 + \frac{1510 \cdot j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2.2 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-3}} \\ &= 1 + j20.8727 \end{aligned}$$

4.3 被測定回路 3

被測定回路 3 の理論値を以下に示す。

A、C の測定において、 $T = 1 \times 10^{-3}[s]$ である。

$$\begin{aligned}V_1 &= RI_1 + X_C \frac{I_1}{2} \\V_2 &= X_C \frac{I_1}{2}\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}A = \frac{V_1}{V_2} &= 1 + 2 \frac{R}{X_C} \\&= 1 + 2 \frac{1.5 \times 10^3 \cdot j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2.2 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-3}} \\&= 1 + j41.4690 \\C = \frac{I_1}{V_2} &= \frac{2}{X_C} \\&= 2 \frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2.2 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-3}} \\&= j0.02765[S]\end{aligned}$$

B、D の測定において、 $T = 9.92 \times 10^{-3}[s]$ である。

$$\begin{aligned}V_1 &= RI_1 + X_C \frac{I_1 - I_2}{2} \\V_2 &= R_{20} \frac{I_1 - I_2}{2} = RI_2 - X_C \frac{I_1 - I_2}{2} \\\frac{1}{X_C} &= j \frac{2\pi 2.2 \times 10^{-6}}{9.92 \times 10^{-3}} \\&= j0.001393\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} B = \frac{V_1}{I_2} &= \frac{2RX_C + RR_{20} + 2R^2}{X_C + R_{20}} \\ &= \frac{2R + \frac{RR_{20}}{X_C} + \frac{2R^2}{X_C}}{1 + \frac{R_{20}}{X_C}} \\ &= \frac{20 + 1610 \cdot j0.001393}{1 + 10 \cdot j0.001393} \\ &= \frac{10.312412289 + j0.84973}{1.0001941} \\ &= 10.3104 + j0.8496[\Omega] \\ D = \frac{I_1}{I_2} &= 1 + \frac{2R}{X_C + R_{20}} \\ &= 1 + \frac{\frac{2R}{X_C}}{1 + \frac{R_{20}}{X_C}} \\ &= 1 + \frac{3000 \cdot j0.001393}{1 + 10 \cdot j0.001393} \\ &= \frac{j4.179(1 - j0.01393)}{1.0001941} \\ &= 0.05820 + j4.1782 \end{aligned}$$

5 結果

5.1 測定値

実験の測定結果を示す。なお、記号はそれぞれ図 3、図 4 に対応している。

θ については、2 つの波形を同時に描いて、横方向のずれから求めている。ずれを ΔT 、周期を T として、 $\theta[^\circ] = 360[^\circ] \times \Delta T/T$ で求めた。今回、実験方法を無視して測定ごとに周波数が異なるので、周期も記載している。この値は、理論値の計算にも使われている。

5.1.1 被測定回路 1

以下は被測定回路 1 の測定結果である。

A、C 測定時

$$\begin{aligned} V_1 &= 19.0[V] \\ V_2 &= 96.7[mV] \\ V_{10} &= 127[mV] \\ \theta_A &= 360[^\circ] \times 26.4[\mu s]/107[\mu s] \\ \theta_C &= 360[^\circ] \times 28.0[\mu s]/107[\mu s] \end{aligned}$$

B、D 測定時

$$\begin{aligned}V_1 &= 18.4[V] \\V_{10} &= 124[mV] \\V_{20} &= 72.7[mV] \\ \theta_B &= 360[^\circ] \times 16.8[\mu s]/106[\mu s] \\ \theta_D &= 360[^\circ] \times 37.6[\mu s]/106[\mu s]\end{aligned}$$

5.1.2 被測定回路 2

以下は被測定回路 2 の測定結果である。

A、C 測定時

$$\begin{aligned}V_1 &= 320[mV] \\V_2 &= 320[mV] \\V_{10} &= 436[mV] \\ \theta_A &= 360[^\circ] \times 0[\mu s]/107[\mu s] \\ \theta_C &= 360[^\circ] \times 27.2[\mu s]/107[\mu s]\end{aligned}$$

B、D 測定時

$$\begin{aligned}V_1 &= 2.84[V] \\V_{10} &= 396[mV] \\V_{20} &= 20.8[mV] \\ \theta_B &= 360[^\circ] \times 2[\mu s]/1[ms] \\ \theta_D &= 360[^\circ] \times 256[\mu s]/1[ms]\end{aligned}$$

5.1.3 被測定回路 3

以下は被測定回路 3 の測定結果である。

A、C 測定時

$$\begin{aligned}V_1 &= 17.8[V] \\V_2 &= 416[mV] \\V_{10} &= 120[mV] \\ \theta_A &= 360[^\circ] \times 248[\mu s]/1[ms] \\ \theta_C &= 360[^\circ] \times 248[\mu s]/1[ms]\end{aligned}$$

B、D 測定時

$$\begin{aligned}V_1 &= 17.8[V] \\V_{10} &= 112[mV] \\V_{20} &= 2.8[mV] \\\theta_B &= 360[^\circ] \times 1.60[ms]/9.92[ms] \\\theta_D &= 360[^\circ] \times 2.96[ms]/9.92[ms]\end{aligned}$$

5.2 実験値

測定結果から得られた実験値を示す。

5.2.1 被測定回路 1

被測定回路 1 の実験値は以下の通りである。

$$\begin{aligned}|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} &= 1.96 \times 10^2 \\ \arg A &= 88.8[^\circ] \\ A &= 4.034 + j1.96 \times 10^2 \\ |B| = \frac{|V_1|R_{20}}{|V_{20}|} &= 1.48 \times 10^3[\Omega] \\ \arg B &= 57.1[^\circ] \\ B &= 8.07 \times 10^2 + j1.25 \times 10^3[\Omega] \\ |C| = \frac{|V_{10}|}{|V_2|R_{10}} &= 1.31 \times 10^{-1}[S] \\ \arg C &= 94.2[^\circ] \\ C &= -9.63 \times 10^{-3} + j1.30 \times 10^{-1}[S] \\ |D| = \frac{|V_{10}|R_{20}}{|V_{20}|R_{10}} &= 1.71 \\ \arg D &= 1.28 \times 10^2[^\circ] \\ D &= -1.04 + j1.35\end{aligned}$$

5.2.2 被測定回路 2

被測定回路 2 の実験値は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} &= 1 \\
\arg A &= 0[^\circ] \\
A &= 1 \\
|B| = \frac{|V_1|R_{20}}{|V_{20}|} &= 1.37 \times 10^3[\Omega] \\
\arg B &= 0.7[^\circ] \\
B &= 1.37 \times 10^3 + j1.72 \times 10[\Omega] \\
|C| = \frac{|V_{10}|}{|V_2|R_{10}} &= 1.36 \times 10^{-1}[S] \\
\arg C &= 91.5[^\circ] \\
C &= -3.60 \times 10^{-3} + j1.36 \times 10^{-1}[S] \\
|D| = \frac{|V_{10}|R_{20}}{|V_{20}|R_{10}} &= 19.0 \\
\arg D &= 9 \times 10[^\circ] \\
D &= -7.18 \times 10^{-1} + j19.0
\end{aligned}$$

5.2.3 被測定回路 3

被測定回路 3 の実験値は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} &= 42.8 \\
\arg A &= 89.3[^\circ] \\
A &= 5.38 \times 10^{-1} + j42.8 \\
|B| = \frac{|V_1|R_{20}}{|V_{20}|} &= 6.36 \times 10^4[\Omega] \\
\arg B &= 58.1[^\circ] \\
B &= 3.36 \times 10^4 + j5.39 \times 10^4[\Omega] \\
|C| = \frac{|V_{10}|}{|V_2|R_{10}} &= 2.89 \times 10^{-2}[S] \\
\arg C &= 89.3[^\circ] \\
C &= 3.63 \times 10^{-4} + j2.88 \times 10^{-2}[S] \\
|D| = \frac{|V_{10}|R_{20}}{|V_{20}|R_{10}} &= 40.0 \\
\arg D &= 1.07 \times 10^2[^\circ] \\
D &= -12.0 + j38.2
\end{aligned}$$

6 考察

6.1 理論値との比較

4 端子定数 (A、B、C、D) の実験値と理論値を比較する。

6.1.1 被測定回路 1

被測定回路 1 について、
理論値は

$$\begin{aligned}A_1 &= 1 + j193.7805 \\B_1 &= 1510 + j1956.0860[\Omega] \\C_1 &= j0.1292[S] \\D_1 &= 1 + j1.3041\end{aligned}$$

である。

実験値は

$$\begin{aligned}A_1 &= 4.034 + j1.96 \times 10^2 \\B_1 &= 8.07 \times 10^2 + j1.25 \times 10^3[\Omega] \\C_1 &= -9.63 \times 10^{-3} + j1.30 \times 10^{-1}[S] \\D_1 &= -1.04 + j1.35\end{aligned}$$

である。

6.1.2 被測定回路 2

被測定回路 2 について、
理論値は

$$\begin{aligned}A_2 &= 1 \\B_2 &= 1510[\Omega] \\C_2 &= j0.1292[S] \\D_2 &= 1 + j20.8727\end{aligned}$$

である。

実験値は

$$\begin{aligned}A_2 &= 1 \\B_2 &= 1.37 \times 10^3 + j1.72 \times 10[\Omega] \\C_2 &= -3.60 \times 10^{-3} + j1.36 \times 10^{-1}[S] \\D_2 &= -7.18 \times 10^{-1} + j19.0\end{aligned}$$

である。

6.1.3 被測定回路 3

被測定回路 3 について、
理論値は

$$\begin{aligned}A_3 &= 1 + j41.4690 \\B_3 &= 10.3104 + j0.8496[\Omega] \\C_3 &= j0.02765[S] \\D_3 &= 0.05820 + j4.1782\end{aligned}$$

である。

実験値は

$$\begin{aligned}A_3 &= 5.38 \times 10^{-1} + j42.8 \\B_3 &= 3.36 \times 10^4 + j5.39 \times 10^4[\Omega] \\C_3 &= 3.63 \times 10^{-4} + j2.88 \times 10^{-2}[S] \\D_3 &= -12.0 + j38.2\end{aligned}$$

である。

A の値はほぼ理論値と等しい。C の実部もほぼ 0 なので理論値に近い。この誤差は、各回路を接続する銅線が抵抗の役割を果たしたものによると思われる。D の実部の符号が逆なので、計算が間違っている恐れがある。回路 3 の D の値は大きく異なっているので測定ミスの恐れがある。B は回路 2 では理論値に近いが、1 と 3 は値が理論値と大きく異なるので、計測時に測定する区間を間違えた恐れがある。また、導線がコイルやコンデンサの役割を果たすことにより、虚部の値が変化し、誤差の原因となると思われる。

6.2 入出力を入れ替えた場合の関係

被測定回路 1、2 の 4 端子定数の測定値より、入力端子と出力端子を入れ替えた場合の関係式

$$A_2 = D_1, B_2 = B_1, C_2 = C_1, D_2 = A_1 \quad (18)$$

が成り立っているかどうかを検討する。

実験値において、

$$\begin{aligned}A_2 - D_1 &= 2.04 - j1.35 \\B_2 - B_1 &= 5.58 \times 10^2 - j1.23 \times 10^3[\Omega] \\C_2 - C_1 &= 6.03 \times 10^{-4} + j6.10 \times 10^{-3}[S] \\D_2 - A_1 &= -4.76 - j1.77 \times 10^2\end{aligned}$$

ゆえ、 $C_1 \approx C_2$ および、 $A_2 \approx D_1$ 。

ほかは、測定ミスもしくは計算ミスと思われる、B 及び D が影響するので成り立たなかったものと思われる。

もとより、実験式で計算しても等価でないので、計算ミスであると思われる。

6.3 自然回路としての関係式

被測定回路 1、2、3 の 4 端子定数の測定値より

$$AD - BC = 1 \quad (19)$$

が成り立っているかどうか検討する。

$$\begin{aligned} A_1 D_1 - B_1 C_1 &= -99.5 - j2.92 \times 10^2 \\ A_2 D_2 - B_2 C_2 &= 6.53 - j1.67 \times 10^2 \\ A_3 D_3 - B_3 C_3 &= -95.6 - j1.48 \times 10^3 \end{aligned}$$

全て 1 には程遠い。やはり、B や D の値が正しくないためであると思われる。

6.4 縦続接続

被測定回路 3 被測定回路 1、2 を縦続接続したものである。縦続接続の場合の関係式

$$\begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

が成り立っているかどうか検討する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1.68 \times 10^2 + j3.02 \times 10^2 & -2.21 \times 10^4 + j2.83 \times 10^5 [\Omega] \\ -0.190 - j1.68 \times 10^{-2} [S] & -40.3 + j1.57 \times 10^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.538 + j42.8 & 3.36 \times 10^4 + j5.69 \times 10^4 [\Omega] \\ 3.63 \times 10^{-4} + j2.88 \times 10^{-2} [S] & -12.0 + j38.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

B の桁が大きい、C の値が小さいなど類似点はあるものの、等しいとするには程遠い。やはり、計測に誤りがあったものと思われる。