

図 1: 二端子対網

1 目的

線路長による位相差、ならびに線路において分岐枝を挿入することによる帯域阻止、帯域遮断フィルター動作を理解することを目的とする。

2 準備

信号発生器、特性インピーダンス 50Ω の同軸ケーブル、コネクタ

3 理論

無損失線路の場合、位相定数を β 、特性インピーダンスを Z_0 として、電圧波と電流波は

$$\begin{cases} V = V_0 e^{-j\beta x} + V_1 e^{j\beta x} \\ I = \frac{1}{Z_0} (V_0 e^{-j\beta x} - V_1 e^{j\beta x}) \end{cases} \quad (1)$$

既に定義された位相定数 β について、もう少し詳しく述べる。 β は単位長さ当たりの位相変化量を表し、単位は $[\text{rad/m}]$ である。角周波数 ω と時間周期 $T[\text{s}]$ の間に $\omega T = 2\pi[\text{rad}]$ の関係があるように、位相定数 β と空間周期である波長 $\lambda[\text{m}]$ の間には

$$\beta\lambda = 2\pi[\text{rad}] \quad (2)$$

の関係がある。

図 1(a) に示すように、二端子対網の端子 1 および端子 2 における複素フェーザ表示の電圧と電流の組をそれぞれ (V_1, I_1) および (V_2, I_2) とおくと、それ

図 2: 線路の入力インピーダンスと電源の内部インピーダンス。

らの組は ABCD 行列、もしくは F 行列と呼ばれる行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

と表される。この ABCD 行列は、複数の 2 端子対網が縦続接続される場合に、回路網全体の両端に於ける電圧および電流の関係が、行列の積で表せて取り扱いが単純であるので、よく用いられる。

一例として、図 1(c) に示すように、直列枝にインピーダンス Z が挿入された二端子対網の場合、ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる。また、図 1(c) に示すように、並列枝にアドミタンスが挿入された二端子対網の場合、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

と表される。

それでは、図 1(e) に示すような有限長の伝送線路の ABCD 行列はどのように表されるであろうか。特性インピーダンスが Z_0 、位相定数が β 、長さが l の無損失線路の両端に対して ABCD 行列を式 (1) より求めると

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & jZ_0 \sin(\beta l) \\ jY_0 \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

ここで、 $Y_0 = 1/Z_0$ は伝送線路の特性アドミタンスである。

有限の無損失伝送線路の ABCD 行列は式 (6) により表される。図 2(a) に示すような端子 2 にインピーダンス Z_L を接続した場合、反対側の端子 1 から負荷側を見た入力インピーダンス Z_i を求めよう。端子 2 に対して $V_2/(-I_2) = Z_L$

の条件を課すと式 (6) から

$$Z_l = \frac{Z_L \cos(\beta l) + j Z_0 \sin(\beta l)}{j Z_L Y_0 \sin(\beta l) L \cos(\beta l)} \quad (7)$$

$$= Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + j Z_L \tan(\beta l)} \quad (8)$$

となる。

式 (8) において $Z_L \rightarrow +\infty$ とおくことにより、

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = j Y_0 \tan(\beta l) \quad (9)$$

図 2(b) のように入力インピーダンスが Z_{in} の線路が電源に接続された場合を考える。電源として内部抵抗 Z_s と電圧源 V が直列に繋がれているとすると全体の等価回路は図 2(c) のように表すことができる。この場合、入力インピーダンスが Z_{in} の線路へ伝送される電力を最大にするためには、

$$Z_s = Z_{in}^* \quad (10)$$

の条件を満たさなければならない。

これまで、電圧 V 、電流 I を用いて伝送線路を考えてきたが、線路に沿って進行する波を概念を定義できれば、波の反射、透過の考え方がよりわかりやすくなる。特性インピーダンス Z_0 の線路に沿って伝播する前進波として

$$a = V^{\rightarrow} / \sqrt{Z_0} = I^{\rightarrow} \sqrt{Z_0}$$

を導入すると、前進波の伝送電力が

$$|a|^2/2 = |V^{\rightarrow}|^2/2Z_0 = |I^{\rightarrow}|^2 Z_0/2$$

と表され、 a の導入により、電流波、電圧波を統一的に扱えることがわかる。同様に後退波に対して

$$b = V^{\leftarrow} / \sqrt{Z_0} = I^{\leftarrow} \sqrt{Z_0}$$

を導入すると、 $|b|^2/2$ が後退波の伝送電力を表す。

この a 、 b と、これまで扱ってきた電圧、電流との関係を求めておこう。電圧 V 、電流 I は、 a 、 b を用いて次のように表される。

$$\begin{cases} V = (a + b)\sqrt{Z_0} \\ I = (a - b)/\sqrt{Z_0} \end{cases} \quad (11)$$

二端子対網の場合、端子 1 および 2 において、それぞれ電圧、電流が定義されている。この場合、端子間の回路網の特性は、これらの電圧、電流を関係付けるインピーダンス行列、アドミタンス行列、あるいは ABCD 行列によ

図 3: 同軸線路の等価回路

り表されてきた。次に、各端子で、前進波 a 、後進波 b を定義して、回路網の特性を表す次の新しい行列 S_0 を導入することにする。

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで行列 S_0 を散乱行列と呼ぶ。対角要素 S_{11} および S_{22} は、それぞれ端子 1 における反射係数 (a_1 から b_1)、端子 2 における反射係数 (a_2 から b_2) を表す。一方で、非対角要素 S_{21} および S_{12} はそれぞれ端子 1 から 2 への透過係数 (a_1 から b_2)、端子 2 から 1 への透過係数 (a_2 から b_1) を表す。この散乱行列は、前出の ABCD 行列の要素を用いて表すと次式のようにになる。

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{A+B/Z_0-CZ_0-D}{A+B/Z_0+CZ_0+D} \\ S_{12} &= \frac{2(AD-BC)}{A+B/Z_0+CZ_0+D} \\ S_{21} &= \frac{2}{A+B/Z_0+CZ_0+D} \\ S_{22} &= \frac{-A+B/Z_0-CZ_0+D}{A+B/Z_0+CZ_0+D} \end{aligned} \quad (13)$$

図 3 に、同軸線路の等価回路を示す。同軸線路といっても、動作周波数などに応じて、さまざまな種類のケーブルおよび接続コネクタが存在するが、本実験では BNC と呼ばれるコネクタを用いる。

4 実験

4.1 線路長と位相

図 4(a) に示すように、長さ l の同軸ケーブル 2 本をコネクタを介して直列に接続し、もう一方の端子には、信号発生器より出力される正弦波を入力し、同軸線路の両端での波形をオシロスコープにより同時に観測する。2 つの波の電圧振幅および信号間の位相差を周波数の函数として測定する。

図 4: 測定回路。(a) 線路長と位相差の実験。(b) 分岐枝による帯域阻止および帯域通過フィルタ実験。

4.2 短絡スタブと帯域通過特性

4.1 の測定系で、2 本の同軸線路の間を繋いでいたコネクタを T 型コネクタに置き換え、線路を分岐させて新たに同軸線路をスタブとして図 4(b) のように接続し、同スタブの終端を短絡終端させる。このとき元の線路の入力端子および出力側 50Ω 終端にかかる電圧波形をオシロスコープで測定する。測定内容としては、電圧振幅および入力信号との位相差を周波数の函数として求める。

4.3 開放スタブと帯域遮断特性

4.2 の測定系に対して、スタブの終端を開放させた場合について、同様の測定を行え。

4.4 スタブ長の影響

4.2 あるいは 4.3 の測定系に対して、スタブの同軸線路長を 2 倍にした場合について同様の測定を行え。

5 結果

4.1 の結果を表 1 に示す。

4.2 の結果を表 2 に示す。

4.3 の結果を表 3 に示す。

4.4 の結果を表 4 に示す。

表 1: 電圧振幅の周波数応答

周波数 [MHz]	入力電圧 [V]	出力電圧 [V]	位相差 [°]
1	1.24	1.26	2.88
2	1.24	1.26	5.76
3	1.22	1.3	8.64
5	1.08	1.3	14.4
8	0.92	1.28	27.6
10.00	0.84	1.3	57.6
15.00	0.832	1.3	103.7
20.00	1.14	1.3	132.5
25.00	1.26	1.28	154.8
30.00	1.1	1.0	168.5
31.00	1.08	0.96	174.1
32.00	1.0	0.936	179.1
33.00	0.96	0.92	180.6
34.00	0.9	0.904	186.0
35.00	0.86	0.872	191.5
40.00	0.7	0.784	233.3
45.00	0.72	0.784	265.7
50.00	0.92	0.784	291.6
55.00	0.96	0.744	304.9
60.00	0.62	0.584	332.6
65.00	0.52	0.5	360.4

6 課題

6.1 課題 2-1

1. 同軸線路の等価回路は先に図 3 に示されている。信号発生器も含めて、4.1 で用いられた回路の等価回路を図示せよ。

解：等価回路を図 5 に示す。

2. 周波数と線路長による位相差の関係を定式化し、横軸が周波数、縦軸が位相差のグラフを図示せよ。

解：式 (1) より、反射波を無視し、 $x = 0$ と $x = l$ での電圧は

$$\begin{aligned}
 V(0) &= V_i e^{-j\beta 0} \\
 &= V_i e^0 \\
 V(l) &= V_i e^{-j\beta l}
 \end{aligned}$$

表 2: 短絡スタブにおける電圧の周波数特性

周波数 [MHz]	入力電圧 [V]	出力電圧 [V]	位相差 [°]
1	-	0.14	2.88
2	-	0.22	5.76
3	-	0.78	13
5	-	0.448	21.6
8	-	0.776	34.6
10	1.24	1	37.4
15	1.24	1.2	77.8
20	1.32	1.2	115.2
25	1.36	1.08	151.2
30	1.16	0.96	164.2
31	1.08	0.92	174.1
32	1.02	0.92	179.7
33	0.96	0.92	190.1
34	0.9	0.86	195.8
35	0.86	0.86	201.6
40	0.82	0.76	253.4
45	1.12	0.68	285.1
50	1.24	0.6	316.8
55	1.04	0.384	328.7
60	0.48	0.156	337
65	-	0.066	365
70	-	0.158	392.4
75	-	0.056	313.2

より、位相差 ϕ は

$$\begin{aligned}\phi &= \beta 0 - (-\beta l) \\ &= \beta l\end{aligned}$$

問題 19 から $\beta = 2\pi f/c$ なので

$$\begin{aligned}\phi[\text{rad}] &= \frac{2\pi l f}{c} \\ &= \frac{\pi}{30} f\end{aligned}$$

但し、 $l = 50[\text{m}]$ 、 $c = 300[\text{Mm/s}]$ 、 $f[\text{MHz}]$ とした。これを $x = 360\phi/(2\pi)$ で度数単位に書き換えて

$$x = 6f$$

表 3: 開放スタブにおける電圧の周波数特性

周波数 [MHz]	出力電圧 [V]
1	1.26
2	1.34
3	1.24
5	1.22
8	1.18
10	1.18
15	1.14
20	1.08
25	0.82
30	0.288
31	0.166
32	0.064
33	0.054
34	0.112
35	0.176
40	0.4
45	0.552
50	0.688
55	0.72
60	0.52
65	0.416

グラフを図 9 に示す。

3. 4.1 の結果を 2 で求めた計算結果のグラフ上にプロットし、比較せよ。

解：グラフは図 9 である。

実験値は理論値より全体的に低い。これは、長さ l が理論値より短い
か、光速 c が理論値より速いことを意味する。光速より早くなることは
ないので、線路長 l (図 4 の $2l$) が 5m より短いと思われる。

課題 2-2

4.2 から 4.4 の測定回路については、それぞれ以下の手順で計算結果と測定
結果の比較・検討を行え。

1. 信号発生も含めて等価回路を図示すること。

図 5: 実験 4.1 の等価回路

図 6: 短絡スタブの等価回路

図 7: 開放スタブの等価回路

表 4: 経路 2 倍の開放スタブにおける電圧の周波数特性

周波数 [MHz]	出力電圧 [V]	位相差 [°]
1	1.12	2.88
2	1.1	7.2
3	1.08	12.96
5	1.04	21.6
8	0.98	46.08
10	0.86	100.8
15	0.244	151.2
20	0.96	92.16
25	1.06	129.6
30	0.96	168.48
31	0.944	174.096
32	0.928	184.32
33	0.912	194.832
34	0.88	201
35	0.864	217
40	0.696	271
45	0.296	292
50	0.312	180
55	0.616	305
60	0.52	328

解：短絡スタブの等価回路を図 6 に示す。開放スタブの等価回路を図 7 に示す。経路 2 倍の開放スタブの等価回路を図 8 に示す。

2. 信号発生器と出力側終端抵抗を除く被測定線路間の複素電圧および電流の関係を ABCD 行列により表すこと。

ヒント：まず、各部分の ABCD 行列を求め、全体の ABCD 行列はそれらの積で表せばよい。次にその行列の展開を計算する。

解：2 本の同軸線路の ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表せる。

短絡の場合、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

図 8: 経路 2 倍の開放スタブの等価回路

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 2 & 3Z \\ 1/Z & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 150 \\ 1/50 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

開放の場合、スタブ部分は無視できるので

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3. 2 で求めた ABCD 行列を散乱行列に変換し、特に、端子 1 から 2 への透過係数 S_{21} の周波数依存特性を計算により求め、グラフに図示すること。但し、 S_{21} の単位としてはデシベル単位 (dB) 表示を用いること。デシベルへの変換は、式 (13) で定義された S_{21} に対して $20\log_{10}(S_{21})[\text{dB}]$ の計算を行えばよい。

解：短絡スタブの場合、

$$\begin{aligned}
 S_{21} &= \frac{2}{2 + 150/Z_0 + Z_0/50 + 2} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

同様に計算し

$$\begin{aligned}
 S &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
 S_{21} &= 1/8 \\
 20\log_{10}(1/4) &= -18.1
 \end{aligned}$$

開放スタブの場合

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$20 \log_{10}(1/4) = -12.0$$

4. 4.1 で得られた終端での出力電圧 V_a に相当する電力 P_a を基準として、
4.2 で得られる出力電圧 V_b に相当する P_b より、被測定回路の透過係数は次式で与えられる。

$$S_{21}[\text{dB}] = 10 \log_{10} \left(\frac{P_b}{P_a} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{V_b}{V_a} \right)$$

この透過係数の周波数依存性を先に求めた計算結果のグラフ上に描け。

解：短絡スタブのグラフを図 10 に、開放スタブのグラフを図 11 に、経路 2 倍開放スタブのグラフを図 12 に示す。

5. 透過係数 S_{21} が -3dB の時、透過電力は 50 % となる。このことを、まず確認せよ。次に、計算結果および測定結果から、それぞれ S_{21} がピーク値から 3dB 小さい値を持つ周波数を求め、これを基準として通過帯域を求めよ。

解：透過電力を x 、入射電力を P_a とすれば

$$\begin{aligned} -3 &= 10 \log_{10} \frac{x}{P_a} \\ \frac{x}{P_a} &= 10^{-0.3} \\ &= 0.5012 \\ &\simeq 50[\%] \end{aligned}$$

通過帯域は、

短絡スタブの場合、ピーク値 19 より 3 小さい値は 16。ゆえに、図から読み取って、1 ~ 6 [3MHz]。

開放スタブの場合、ピーク値 24 より 3 小さい値は 21。ゆえに、図から読み取って、0 ~ 32、34 ~ [MHz]。

経路 2 倍開放スタブの場合、ピーク値 13 より 3 小さい値は 10。ゆえに、図から読み取って、0 ~ 14、16 ~ 52、54 ~ [MHz]。

7 考察

課題 2-2 の 2. において、理論値も周波数に応じて変化するはずであるが、そうっていない。これは、理論に用いる式が間違っている、もしくは、理論に用いる式の近似部分を多く取りすぎたことが原因と思われる。

また、位相差の周波数特性などで、 $C = f\lambda$ としたが、伝送線路中を伝わる電磁波の速度は明らかに光速以下なので、これによる誤差が発生していると思われる。

8 問題

問題 15

図 1(b) から式 (4) を導け。

解：キルヒホッフの法則より

$$\begin{aligned} I_1 &= -I_2 \\ V_1 - Z \cdot I_1 - V_2 &= 0 \\ \text{よって、} \\ V_1 &= V_2 + Z(-I_2) \\ I_1 &= 0 \cdot V_2 - I_2 \\ \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題 17

式 (1) から式 (6) を導け。

解： $x = l$ を代入し、

$$\begin{aligned} V &= V_0(\cos(-\beta l) + j \sin(-\beta l)) + V_1(\cos(\beta l) + j \sin(\beta l)) \\ &= (V_0 + V_1) \cos(\beta l) - j(V_0 - V_1) \sin(\beta l) \\ I &= \frac{1}{Z_0}(V_0(\cos(-\beta l) + j \sin(-\beta l)) - V_1(\cos(\beta l) + j \sin(\beta l))) \\ &= \frac{1}{Z_0}\{(V_0 - V_1) \cos(\beta l) - (V_0 + V_1) \sin(\beta l)\} \end{aligned}$$

反射波成分である V_1 を無視し (つまり $V_1 = 0$)、 $V = V_1$ 、 $V_0 = V_2$ と書き換えれば、

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \cos(\beta l) - V_2 j \sin(\beta l) \\ I_1 &= \frac{V_2}{Z_0} j \sin(\beta l) - \frac{V_2}{Z_0} \cos(\beta l) \end{aligned}$$

$V = ZI$ より

$$V_1 = V_2 \cos(\beta l) - j I_2 Z_0 \sin(\beta l)$$

$$I_1 = V_2 \frac{1}{Z_0} j \sin(\beta l) - I_2 \cos(\beta l)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & j Z_0 \sin(\beta l) \\ j Y_0 \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

問題 19

終端が開放された無損失伝送線路の入力アドミタンスは式 (9) で与えられ純虚数である。そのリアクタンス部を周波数の函数として図示し、誘導素子あるいは容量素子として動作する周波数帯をそれぞれ示せ。さらに線路長 l の函数とした場合についても示せ。

解：光速を $c[\text{Mm/s}]$ として、式 (2)、周波数 $f[\text{MHz}] = c[\text{Mm/s}]/\lambda[\text{m}]$ から

$$\beta = \frac{2f\pi}{c}[\text{MHz}]$$

$$Y_1 = jY_0 \tan\left(\frac{2f\pi l}{c}\right)$$

誘導素子として働くのは、周波数の函数とすれば

$$\frac{2f\pi l}{c} < \frac{\pi}{2}$$

$$f < \frac{c}{4l}$$

線路長の函数とすれば

$$l < \frac{c}{4f}$$

容量素子として働くのは、周波数の函数とすれば

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2f\pi l}{c} < \pi$$

$$\frac{c}{4l} < f < \frac{c}{2l}$$

線路長の函数とすれば

$$\frac{c}{4f} < l < \frac{c}{2f}$$

問題 20

伝送電力を最大にするインピーダンス整合条件の式 (10) を導け。

解：流れる電流を I 、インピーダンスを Z とすると

$$V = IZ$$

$$W = \Re(VI^*)$$

$$\begin{aligned}
&= \Re(II^*Z) \\
&= \Re\{(\Re I)^2 + (\Im I)^2\}(\Re Z) + j\{(\Re I)^2 + (\Im I)^2\}(\Im Z)
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
W &= \Re(VV^*/Z) \\
&= \Re\left\{\frac{|V|^2}{|Z|^2}(\Re Z - j\Im Z)\right\}
\end{aligned}$$

したがって Z の虚部が 0 である必要がある。 $Z = Z_{in} + Z_s$ であるから、

$$\Im(Z_s) = \Im(Z_{in}^*)$$

問題 21

ABCD 行列から散乱行列への変換式 (13) を、式 (3)、(11)、(12) を用いて導け。

解：式 (11) を (3) に代入し、

$$\begin{aligned}
(a_1 + b_1)\sqrt{Z_0} &= A(a_2 + b_2)\sqrt{Z_0} - B\frac{a_2 - b_2}{\sqrt{Z_0}} \\
\frac{a_1 - b_1}{\sqrt{Z_0}} &= C(a_2 + b_2)\sqrt{Z_0} - D\frac{a_2 - b_2}{\sqrt{Z_0}}
\end{aligned}$$

両辺に $\sqrt{Z_0}$ をかけて

$$\begin{aligned}
(a_1 + b_1)Z_0 &= AZ_0(a_2 + b_2) - B(a_2 - b_2) \\
(a_1 - b_1) &= CZ_0(a_2 + b_2) - D(a_2 - b_2)
\end{aligned}$$

これを計算し、

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{A + B/Z_0 - CZ_0 - D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}a_1 + \frac{2(AD - BC)}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}a_2 \\
b_2 &= \frac{2}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}a_1 + \frac{-pA + B/Z_0 - CZ_0 - D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}a_2
\end{aligned}$$

よって、式 (13) が成り立つ。