

1 目的

本実験では、ベースバンドのパルス (方形波) 信号が、伝送線路に沿って伝播する様子を観察することにより、伝播遅延および伝播損失が見られることを実験により確認すると共に、線路終端での反射特性および異種線路間での反射特性を、実験を通して学習する。

2 準備

ワンショットマルチプライベータの出力信号をオシロスコープにより直接観測し、最大値 3V 程度、最小値 0V、パルス幅 80~100ns の方形パルスとなっていることを確認し、パルス幅およびパルス高さの測定を行う。

3 理論

電界ベクトル $\mathbf{E}$ [V/m]、磁界ベクトル $\mathbf{H}$ [A/m] の大きさの比は常に一定であり、次のような関係がある

$$\frac{E}{H} = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 \simeq 120\pi \simeq 377[\Omega] \quad (1)$$

自由空間中において、x 軸に沿って伝播する電磁波を表す波動方程式の一般解の 1 つは

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_1 = 0 \quad (2)$$

を解いて

$$E_1 = g(x - ct) \quad (3)$$

である。

置き換え式

$$\begin{aligned} v &= -E_z \\ i &= H_y \\ L &= \mu_r \mu_0 \\ C &= \epsilon_r \epsilon_0 \end{aligned} \quad (4)$$

伝送線路モデルでは一方向に前進する電圧波と電流波の振幅比を**特性インピーダンス**と呼んで定義し、式 (4) を用いて、 Z_0 を L および C で表すと次のようになる

$$Z_0 = \frac{v}{i} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5)$$

物質中を伝播する電磁波の位相速度 v_p は光速 c 、比誘電率 ϵ_r 、透磁率 μ_r を用いて

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (6)$$

と表せる。

信号源として、角周波数 $\omega = 2\pi f$ [rad/s] の正弦波交流電源が接続されているとする。このような定常状態においては、時間振動因子 $\exp(j\omega t)$ を用いて

$$v(x, t) = \Re[V(x)e^{j\omega t}] \quad (7)$$

と書くことができる。式 (7) で定義された空間座標 x の複素関数である複素電圧は伝送線路単位長さ当たりの静電容量を C [F/m]、単位長さ当たりのインダクタンスを L [H/m]、単位長さ当たりの抵抗分を R [Ω /m]、単位長さ当たりのコンダクタンス成分を G [S/m] とした時に

$$\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \quad (8)$$

となる γ を用いて

$$V = V_0 e^{-\gamma x} + V_1 e^{\gamma x} \quad (9)$$

と表せる。このとき、

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (10)$$

を伝播定数と呼び、その実部 α を減衰定数、虚部 β を位相定数と呼ぶ。

インピーダンスの異なる 2 種類の無損失伝送線路間の透過・反射係数を示す。伝播係数 β_1 、特性インピーダンス Z_{01} の線路 1 と伝播係数 β_2 、特性インピーダンス Z_{02} の線路 2 が $x=0$ で接続され、線路 1 側から信号波が x 軸に沿って正の方向 (線路 1 $\rightarrow$ 線路 2 の方向) に入射する場合の反射波および透過波を求めることにする。この場合、線路 1 内では入射波と反射波が存在するので、電圧波、電流波はそれぞれ

$$V = V_i e^{-j\beta_1 x} + V_r e^{+j\beta_1 x} \quad (11)$$

$$I = \frac{1}{Z_{01}} (V_i e^{-j\beta_1 x} - V_r e^{+j\beta_1 x}) \quad (12)$$

と表される。但し、 V_i および V_r はそれぞれ電圧波の入射成分および反射成分の複素振幅を表している。線路 2 中においては、 x の正の方向に進む透過波しか存在しないので、

$$V = V_t e^{-j\beta_2 x} \quad (13)$$

$$I = \frac{1}{Z_{02}} V_t e^{-j\beta_2 x} \quad (14)$$

と表される。 V_t は透過成分の複素振幅である。 $x=0$ の点で、線路 1 および 2 の電圧および電流が連続であるという境界条件を課すと、

$$V_i + V_r = V_t \quad (15)$$

$$\frac{1}{Z_{01}} (V_i - V_r) = \frac{1}{Z_{02}} V_t \quad (16)$$

図 1: パルスの反射実験の測定回路。(a) 線路長の推定、伝播損の評価、終端負荷による反射の測定。(b) 異種線路間の反射測定。

を得る。この結果から電圧反射係数 $\Gamma = V_r/V_i$ および電圧透過係数 $T = V_t/V_i$ は

$$\Gamma = \frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (17)$$

$$T = \frac{V_t}{V_i} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (18)$$

となる。

終端位置での反射係数 Γ_L は特性インピーダンスを Z_0 、終端の負荷のインピーダンスを Z_L として

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (19)$$

となり、入力端での入力波、反射波の振幅比 Γ_{in} は

$$\Gamma_{in} = \frac{V_r e^{-\gamma l}}{V_i e^{\gamma l}} = \Gamma_L e^{-2\gamma l} = \Gamma_L e^{-2\alpha l} e^{-2\beta l} \quad (20)$$

4 実験

4.1 パルスの伝播遅延および線路長の推定

まず、ワンショットマルチバイブレータの出力端子に特性インピーダンス 75Ω の線路 M を接続し (図 4.1(a) 参照)、線路 M の反対側の端子に $Z_L=75\Omega$ の負荷抵抗を接続する。この線路 M の両端、すなわち電源側ならびに負荷側における波形をオシロスコープにより同時に観測する。2つの位置においてパルスの現れる時刻の差 (遅延時間) ならびに振幅 (最大値) を測定せよ。

また、特性インピーダンス 75Ω の線路 L についても行う。

4.2 開放端での反射および線路長の測定

図 4.1(b) の回路構成で、線路 M の負荷側終端を開放 ($Z_L = +\infty$) して、電源側の端子における波形を観測する。このとき、パルスが 2 つ現れることを確認せよ。

同様に、線路 M の負荷側終端を短絡 ($Z_L = 0$) した場合にもパルスが 2 つ (ないし 3 つ) 現れることを確認せよ。

Z_L が $+\infty$ と 0 のそれぞれの場合について、現れた 2 つのパルスの時間差 (遅延時間) ならびに振幅 (最大値) を測定せよ。

また、線路 L についても行う。

4.3 終端抵抗とパルスの反射

線路 M を図 4.1(a) のように接続し、終端抵抗が $Z_L=0$ 、12、22、50、75、150、220、1000 Ω ならびに $+\infty$ の場合について、それぞれ線路 M の入力端子において観測される 2 つのパルスの振幅を測定せよ。

4.4 異種線路間の反射

図 4.1(b) に示すように、線路 M の先端に特性インピーダンスが 50 Ω の線路 N をつなぎ、終端抵抗 Z_L を 2、3 通り変えて、反射係数がどのようになるか観測せよ。また、線路 M の終端に、線路 N をつなぐずに $Z_L = 50\Omega$ の負荷抵抗で直接終端した場合の反射パルスの遅延時間や振幅を観測し、先の測定結果と比較せよ。

5 結果

図 4.1 の (a) による実験結果を表 1 に示す。

図 4.1 の (b) による実験結果を表 2 に示す。

6 課題

課題 1-1

パルスの遅延時間と線路 M 内の電磁波の速度から、線路の長さを推定せよ。また 2 つのパルスの振幅比を使って減衰定数を算出せよ。但し、 $\epsilon_r = 2.3$ とする。

表 1: 線路長の推定、伝播損の評価、終端負荷による反射の測定

線路の種類と負荷抵抗	遅延時間	1 つ目の振幅	2 つ目の振幅
M、75[Ω]	102[ns]	2.68[V]	2.52[V]
M、 $+\infty$ [Ω]	204[ns]	2.72[V]	2.48[V]
M、0[Ω]	204[ns]	2.76[V]	-1.52[V]
L、75[Ω]	150[ns]	2.76[V]	2.52[V]
L、 $+\infty$ [Ω]	294[ns]	2.72[V]	2.40[V]
L、0[Ω]	296[ns]	2.72[V]	-1.48[V]
M、0[Ω]		2.76[V]	-1.56[V]
M、12[Ω]		2.76[V]	-1.36[V]
M、22[Ω]		2.76[V]	-1.20[V]
M、50[Ω]		2.72[V]	-560[mV]
M、75[Ω]		2.72[V]	-38[mV]
M、150[Ω]		2.72[V]	800[mV]
M、220[Ω]		2.72[V]	900[mV]
M、1000[Ω]		2.66[V]	2.08[V]
M、 $+\infty$ [Ω]		2.70[V]	2.36[V]

解：式 6 および、透磁率は 1 としてよいので電磁波の速度 v は

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{3.0 \times 10^8}{\sqrt{2.3}} \\
 &= 2.0 \times 10^8 [\text{m/s}]
 \end{aligned}$$

遅延時間は、表 1 から 102[ns] なので、伝送線路の長さ l は

$$\begin{aligned}
 l &= 2.0 \times 10^8 \cdot 102 \times 10^{-9} \\
 &= 20[\text{m}]
 \end{aligned}$$

減衰定数は、式 (9) より減衰定数を α として位相の変化がないので $\gamma = \alpha$ としてよく、また、反射を無視できるので

$$V = V_0 e^{\alpha x}$$

となる。ゆえに

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{x} \log_e \frac{V}{V_0} \\
 &= \frac{1}{20} \log_e \frac{2.52}{2.68} \\
 &= -3.08 \times 10^{-3} [\text{m}^{-1}]
 \end{aligned}$$

表 2: 異種線路間の反射測定

終端抵抗	遅延時間	1 つ目の振幅	2 つ目の振幅
0[Ω]	204[ns]	2.68[V]	2.40[V]
75[Ω]	204[ns]	2.68[V]	2.44[V]
220[Ω]	204[ns]	2.68[V]	2.40[V]
$+\infty$ [Ω]	204[ns]	2.68[V]	2.44[V]
N をつながずに直接負荷を接続した場合			
終端抵抗	遅延時間	1 つ目の振幅	2 つ目の振幅
50[Ω]	208[ns]	2.68[V]	600[mV]

課題 1-2

パルスの遅延時間と線路内の電磁波の速度から、線路 M の長さを推定せよ。

また $Z_L = +\infty$ の場合の 2 つの振幅比より減衰定数を算出せよ。

解：電磁波の速度は 1-1 と同じなので、伝送線路の往復分の長さ $2l$ は

$$\begin{aligned} 2l &= 2.0 \times 10^8 \cdot 204 \times 10^{-9} \\ &= 41[\text{m}] \end{aligned}$$

減衰定数も 1-1 と同様に

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{x} \log_e \frac{V}{V_0} \\ &= \frac{1}{41} \log_e \frac{2.48}{2.72} \\ &= -2.31 \times 10^{-3} [\text{m}^{-1}] \end{aligned}$$

課題 1-3

線路 L について、課題 1-1、1-2 と同様のデータ処理を行え。

$Z_L = 75[\Omega]$ の場合、

線路長 l は

$$\begin{aligned} l &= 2.0 \times 10^8 \cdot 150 \times 10^{-9} \\ &= 30[\text{m}] \end{aligned}$$

減衰定数 α は

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{30} \log_e \frac{2.52}{2.76} \\ &= -3.03 \times 10^{-3} [\text{m}^{-1}] \end{aligned}$$

$Z_L = +\infty$ の場合、
往復分の線路長 $2l$ は

$$\begin{aligned} l &= 2.0 \times 10^8 \cdot 294 \times 10^{-9} \\ &= 59[\text{m}] \end{aligned}$$

減衰定数 α は

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{59} \log_e \frac{2.40}{2.72} \\ &= -2.12 \times 10^{-3} [\text{m}^{-1}] \end{aligned}$$

課題 1-4

2つのパルスの振幅比 (符号も考慮に入れる) を、入力端子で観測される反射係数 Γ_{in} の測定値とし、測定より算出される減衰定数 α と式 (20) を使って、負荷の接続された終端での反射係数 Γ_L に換算せよ。これらの値を式 (19) の理論曲線とともにグラフに表せ。尚、図の作成に際しては、片対数グラフを用いること。

解： $\beta=0$ としてよいので、式 (20) は

$$\Gamma_L = \Gamma_{in} e^{\alpha 2l}$$

となる。ここで、減衰定数を課題 1-1 と 1-2 の平均値である $\alpha = 2.67 \times 10^{-3} [\text{m}^{-1}]$ 、線路長を $2l = 41$ として式 (20) を用いた実測値と、式 (19) を用いた理論値を表 3 に示し、グラフを図 2 に示す。

表 3: 課題 1-4 の解

終端抵抗	理論値	実測値
0[Ω]	-1.00	-0.54
12[Ω]	-0.724	-0.44
22[Ω]	-0.546	-0.41
50[Ω]	-0.200	-0.20
75[Ω]	0	-0.0013
150[Ω]	0.33	0.28
220[Ω]	0.492	0.32
1000[Ω]	0.86	0.75
∞ [Ω]	1	0.84

7 考察

抵抗が 0 であっても反射係数は理論値の -1 にならない。これは、短絡に用いた導体の抵抗が完全には 0 でなかったことが原因であると思われる。

線路 N をつながずに $Z_L = 50[\Omega]$ の負荷抵抗で直接終端した場合は、表 1 の $M, 50[\Omega]$ の値と一致するはずなので、どちらかの値を記録する際にマイナス符号を間違えた恐れがある。

また、線路 N をつないだ場合、その先の負荷抵抗の値にかかわらず、ほぼ同じ値をとることから、N との接続で反射した値のみを計測したことになる。その先の終端での反射が計測されていないので、測定ミスである。

8 問題

問題 1

自由空間に蓄えられる電磁波の単位体積あたりの電気エネルギー密度および磁気エネルギー密度が等しいと仮定して式 (1) を導出せよ。ヒント：付録 2 参照

解：付録 2 によると電気エネルギー密度 w_e と磁気エネルギー密度 w_m は以下のように与えられる

$$\begin{aligned}w_e &= \frac{1}{2}\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2 \\w_m &= \frac{1}{2}\mu_0|\mathbf{H}|^2\end{aligned}$$

ここで、それらが等しいとした場合、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2 &= \frac{1}{2}\mu_0|\mathbf{H}|^2 \\ \varepsilon_0|\mathbf{E}|^2 &= \mu_0|\mathbf{H}|^2 \\ \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \\ &\simeq \sqrt{\frac{1.26 \times 10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12}}} \\ &\simeq 0.3767 \times 10^3 \simeq 377\end{aligned}$$

問題 3

式 (3) で表される一般解 E_1 が偏微分方程式 (2) を満足することを示せ。

解：式 (2) から

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_1}{c\partial t} = 0$$

また、

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_1}{\partial x} &= \frac{\partial g(x-ct)}{\partial x} \\ &= g'(x-ct) \\ \frac{\partial E_1}{c\partial t} &= \frac{\partial g(x-ct)}{c\partial t} \\ &= \frac{-c \cdot g'(x-ct)}{c} \\ &= -g'(x-ct)\end{aligned}$$

ゆえに、式 (3) は式 (2) を満たす。

問題 7

真空中の誘電率および透磁率を、波動インピーダンス Z_0 および光速 c を用いて表せ。

解：式 (6) より

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$

また、式 (1) から

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0$$

これらを両辺かけて

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0^2}} &= cZ_0 \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{cZ_0}\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\sqrt{\mu_0^2} &= \frac{Z_0}{c} \\ \mu_0 &= \frac{Z_0}{c}\end{aligned}$$

問題 9

問題 1 と同様の考え方で、一方向に前進する電圧波 v によって蓄えられるエネルギーと同方向に伝播する電流波 i によって蓄えられるエネルギーの両者が相等しいと仮定して、式 (5) を導出せよ。

解：

$$\begin{aligned}
 W_v &= \frac{1}{2} C v^2 \\
 W_i &= \frac{1}{2} L i^2 \\
 W_v &= W_i \text{だから} \\
 \frac{1}{2} C v^2 &= \frac{1}{2} L i^2 \\
 \frac{L}{C} &= \frac{v^2}{i^2} \\
 \sqrt{\frac{L}{C}} &= \frac{v}{i}
 \end{aligned}$$

問題 11

式 (8) において、損失を与える R および G が微量で、 $|R| \ll |\omega L|$ 、 $|G| \ll |\omega C|$ を満たすとき、式 (10) で定義されている α および β を R 、 G の一次の項まで考慮した近似式で表せ。

解：

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \\
 &= j\omega\sqrt{LC} \sqrt{\frac{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}{j\omega L \cdot j\omega C}} \\
 &= j\omega\sqrt{LC} \sqrt{\left(\frac{R}{j\omega L} + 1\right) \left(\frac{G}{j\omega C} + 1\right)} \\
 &= j\omega\sqrt{LC} \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

テイラー展開し

$$\begin{aligned}
 \gamma &\simeq j\omega\sqrt{LC} \left(\left. \frac{(1 - j \cdot 0)^{\frac{1}{2}}}{0!} x \right|_{\frac{R}{\omega L}} + \frac{\frac{1}{2}(-j \cdot 0)^{-\frac{1}{2}}}{1!} x \right|_{\frac{R}{\omega L}} \right) \left(\left. \frac{(1 - j \cdot 0)^{\frac{1}{2}}}{0!} x \right|_{\frac{G}{\omega C}} + \frac{\frac{1}{2}(-j \cdot 0)^{-\frac{1}{2}}}{1!} x \right|_{\frac{G}{\omega C}} \right) \\
 &\simeq j\omega\sqrt{LC} \left(1 - \frac{j}{2} \frac{R}{\omega L}\right) \left(1 - \frac{j}{2} \frac{G}{\omega C}\right)
 \end{aligned}$$

問題 13

電流波で見た場合の電流反射係数および電流透過係数を求めよ。

解：

$$\begin{aligned}
 I_i &= \frac{V_i}{Z_{01}} \\
 I_r &= -\frac{V_r}{Z_{01}}
 \end{aligned}$$

$$I_t = \frac{V_t}{Z_{02}}$$

であるから、式 (17)、(18) より電流反射係数 $\Gamma_i = I_r/I_i$ 、電流透過係数 $T_i = I_t/I_i$ は

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= \frac{I_r}{I_i} = \frac{-\frac{V_r}{Z_{01}}}{\frac{V_i}{Z_{01}}} = -\frac{V_r}{V_i} \\ &= \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} \\ T_i &= \frac{I_t}{I_i} = \frac{\frac{V_t}{Z_{02}}}{\frac{V_i}{Z_{01}}} = \frac{Z_{01}}{Z_{02}} T \\ &= \frac{2Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}\end{aligned}$$

問題 14

式 (17)、(18) で定義される反射係数 Γ および透過係数 T を足し合わせると 1 となっているが、これはエネルギー保存則を直接意味しているわけではない。それでは、エネルギー保存則を示すためにはどうすればよいか。説明せよ。

解：エネルギー W は $W = V \times I$ で表されるので入射波のエネルギーが反射波のエネルギーと透過波のエネルギーの和になればよい。つまり、

$$V_i \times I_i = V_r \times I_r + V_t \times I_t$$

となればよい。